Демо-версия: Математика 11 класс, 2021-22 год.

(Тур длится 240 минут. Итогом является сумма баллов по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; если эта сумма больше 100, то итоговой оценкой считается 100 баллов. Баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

12 1. На доске написана система из 12 различных уравнений с 6 неизвестными $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Каждое уравнение имеет вид $x_i + x_j + x_k = 0$, где $i \neq j \neq k$ (сумма трех различных неизвестных равна нулю). Могло ли оказаться так, что у системы бесконечно много решений?

25 2. Для натуральных чисел a и b через $[a, b]$ и (a, b) будем обозначать наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель соответственно чисел a и b. Найдите все натуральные n, для которых выполняется равенство

$$4\sum_{k=1}^{n}[n,k] = 1 + \sum_{k=1}^{n}(n,k) + 2n^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n,k)}$$

20 3. Точка H является точкой пересечения высот остроугольного треугольника ABC, точка D – середина BC. Точка E лежит на биссектрисе угла $\angle BAC$, причем $AE \perp HE$. Точка F такова, что $AEHF$ – прямоугольник. Докажите что точки D, E, F лежат на одной прямой.

35 4. Дана пара взаимно-простых многочленов с действительными коэффициентами $P(x)$ и $Q(x)$ степеней 2021 и 2000 соответсвенно (*взаимно-простые* означает, что не существует многочлена $R(x)$, не равного константе, на который делятся $P(x)$ и $Q(x)$). Гриша выбирает конечное множество действительных чисел $c_1, \dots c_n$ (помните, в *множестве* элементы не повторяются,размер множества Гриша тоже выбирает сам), находит число различных кратных действительных корней у многочлена $P(x) + c_iQ(x)$ (при i от 1 до n) и складывает полученные числа. Какую наибольшую сумму Гриша может получить в результате этого процесса?

5. Даны m подмножеств n-элементного множества: $A_1, \dots, A_m$. Обозначим через $|A_i|$ число элементов множества A_i. Рассмотрим неравенство

$$n^2\sum_{i,j,k=1}^{m}|A_i \cap A_j \cap A_k| \geq (|A_1| + \dots + |A_m|)^3,$$

в котором индексы i, j, k пробегают все значения от 1 до m, то есть в сумме всего m^3 слагаемых.

12 а) Докажите это неравенство при $m = 3$.

30 б) Докажите это неравенство при произвольном натуральном m.

50 6. Для таблички $n \times n$ рассматриваем семейство квадратов 2×2, состоящих из клеток таблицы, и обладающее свойством: для любого квадрата семейства найдется покрытая им клетка, не покрытая никаким другим квадратом из семейства. Через $f(n)$ обозначим максимальное количество квадратов в таком семействе. Для какого наименьшего C неравенство $f(n) \leq Cn^2$ верно при любом n?